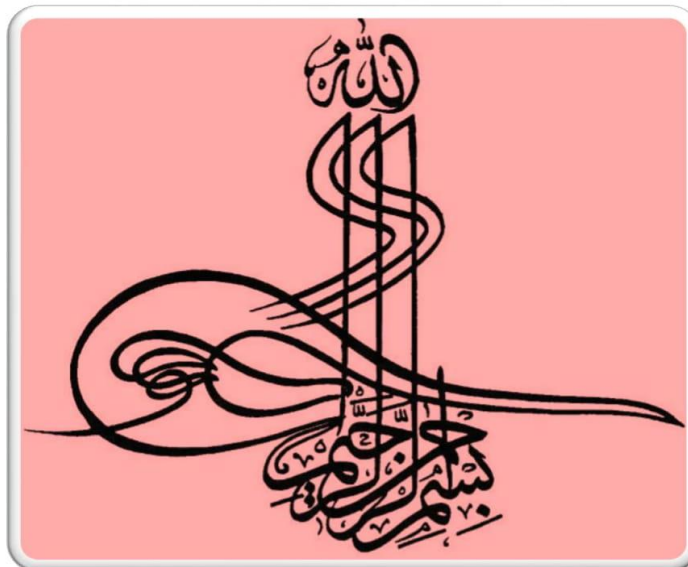


۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی



۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

مثلات

(فصل چهارم ریاضی پایه یازدهم تجربی)

طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی

پاسخ کاملا تشریحی

حل تمامی فعالیت ها و کاردر کلاس ها و تمرینات

مؤلف:

حبیب هاشمی

۱۳۹۶

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تألیف حبیب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس در برگزاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش و پرورش منطقه ۴ تهران و مدرس دانشگاه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا به آیدی تلگرام @habib_hashemi پیام دهید.

اینستاگرام: academy.riazi

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تألیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

تدریس خصوصی و مبحثی ریاضیات

متوسطه

و

تضمینی کنکور

تهران و کرج

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب فصل چهارم کتاب درسی پایه یازدهم تجربی، مبحث «مثلثات» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

- ۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.
 - ۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.
 - ۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.
 - ۴- در این کتاب با نگاهی عمیق تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.
 - ۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.
 - ۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.
 - ۷- توجه به دانش قبلی دانش آموزان.
 - ۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.
- در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

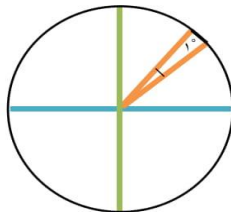
حبیب هاشمی

درس اول : واحدهای اندازه گیری زاویه

یاد آوری

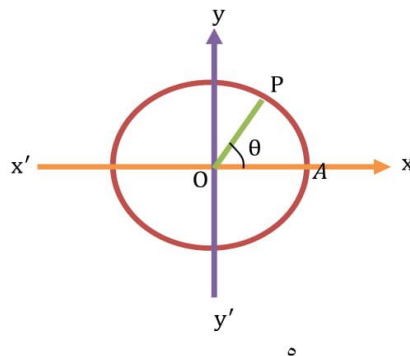
تعریف درجه :

اگر محیط دایره ای را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازه زاویه مرکزی رویه روی هر کدام از این کمان ها ۱ درجه است.
نکته: اندازه هر کمان با زاویه مرکزی روبروی آن کمان بر حسب درجه برابر است.



دایره مثلثاتی

دایره ی زیر که دارای سه ویژگی است را دایره مثلثاتی گوئیم.



مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

۱- مرکز دایره در مبدأ مختصات قرار دارد

۲- شعاع دایره ۱ است

۳- نقطه A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است.

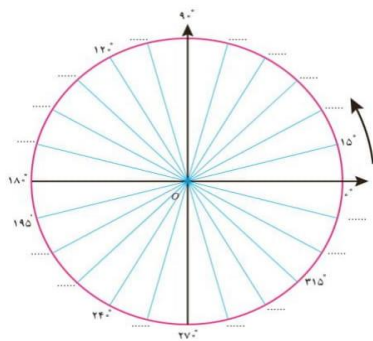
قرارداد: گر نقطه P روی این دایره در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کند، زاویه AOP مثبت و

اگر حرکت در جهت عقربه های ساعت باشد، زاویه منفی است.

تذکر: منظور از جهت مثلثاتی همان جهت مثبت است.

شکل مقابل یک دایره مثلثاتی را نمایش می دهد که به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. در جاهای خالی

زاویه مناسب را روی شکل مشخص کنید.



برای اندازه گیری زاویه، واحد دیگری وجود دارد که در ادامه با آن آشنا می شوید.

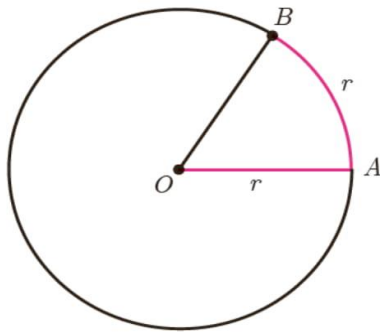
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

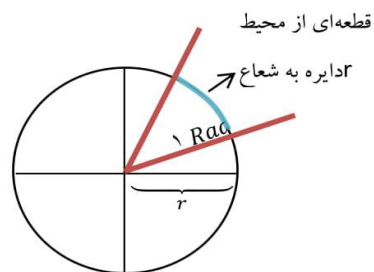
حبیب هاشمی

تعریف رادیان :

اگر قطعه نخى را به اندازه شعاع يك دایره برش دهیم و آن را از نقطه A روی محیط آن دایره قرار دهیم تا نقطه B حاصل شود (شکل مقابل). اندازه AOB را یک رادیان گوئیم



۱ رادیان برابر است با اندازه زاویه مرکزی دایره ای که طول کمان رو به روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.



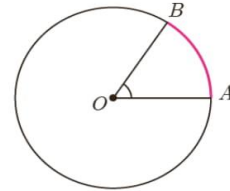
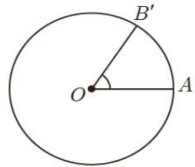
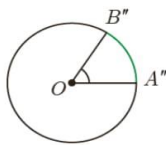
مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

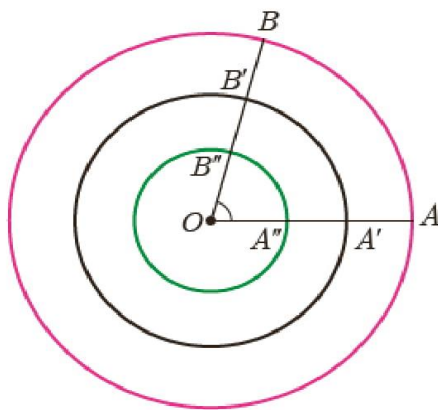
@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

در تمام دایره های زیر اندازه زاویه مشخص شده ۱ رادیان است



به عبارت دیگر اگر اندازه AOB ، ۱ رادیان باشد، در شکل مقابل داریم :



$$OA = AB$$

$$OA' = A'B'$$

$$OA'' = A''B''$$

تذکره: می دانیم نسبت محیط هر دایره به قطر آن عددی ثابت است که آن را با π نمایش می دهند و به آن

عدد پی می گویند . مقدار تقریبی این عدد $3/14$ است.

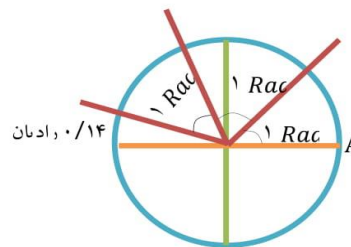
مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

اگر قطعه نخى را به اندازه شعاع يك دایره برش دهیم و آن را از نقطه A روی محیط دایره قرار دهیم و این کار را تکرار کنیم همانطور که در شکل زیر مشاهده می کنیم زاویه مرکزی روبروی کمان نیم دایره تقریباً برابر $\frac{3}{14}\pi$ رادیان یا همان π رادیان است.



نکته: اندازه زاویه مرکزی رو به رو کمان نیم دایره برابر است با 180° یا π رادیان. به عبارت دیگر اندازه زاویه نیم صفحه برابر است با π رادیان

180° برابر π رادیان است یعنی اگر π رادیان از محیط دایره را طی کنیم مانند این است که 180° درجه را طی کرده ایم)

تذکر: π با 180° برابر نیست بلکه π تقریباً $\frac{3}{14}\pi$ است (π رادیان برابر 180° درجه است)

رابطه بین درجه و رادیان:

اگر D اندازه زاویه α بر حسب درجه و R اندازه زاویه α بر حسب رادیان باشد، آنگاه

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

مثال: زاویه ۲۰° را به رادیان تبدیل کنید. $\frac{۲۰}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{۲۰ \cdot \pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۹}$

تمرین: هریک از زاویه های ۳۰° ، -۱۲۰° ، -۲۲۵° و ۳۳۰° را به رادیان تبدیل کنید

مثال: زاویه $\frac{\pi}{6}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید.

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{۱۸۰^\circ}{۶} \Rightarrow D = ۳۰^\circ$$

مثال: زاویه D بر حسب درجه برابر $\frac{\pi}{۲}$ رادیان است. اندازه این زاویه چند درجه است؟

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{\frac{\pi}{۲}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} \Rightarrow D = ۹۰^\circ$$

مثال: یک رادیان تقریباً چند درجه است؟

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{۱}{\pi} \rightarrow D = \frac{۱۸۰}{\pi} = \frac{۱۸۰}{۳.۱۴} = ۵۷.۳$$

نکته: یک رادیان تقریباً ۵۷ درجه است.

مثال: جدول زیر را با استفاده از رابطه $\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi}$ کامل کنید.

D (درجه)	۵°		۲۴°	۷۲°	۱۲۰°	
R (رادیان)	$\frac{\pi}{۳۶}$	$\frac{\pi}{۷}$		$\frac{۲\pi}{۵}$		$\frac{۵\pi}{۴}$

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{n}{N} \cdot \frac{l}{l} \cdot \frac{\pi}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180^\circ}{7} \Rightarrow D = 25.71^\circ$$

$$\frac{24^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{N} \cdot \frac{l}{l} \cdot \frac{\pi}{\pi} \Rightarrow R = N \cdot \frac{2\pi}{15}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{n}{N} \cdot \frac{l}{l} \cdot \frac{\pi}{\pi} \Rightarrow D = \frac{2 \times 180^\circ}{5} \Rightarrow D = 72^\circ$$

$$\frac{120^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{N} \cdot \frac{l}{l} \cdot \frac{\pi}{\pi} \Rightarrow R = N \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{n}{N} \cdot \frac{l}{l} \cdot \frac{\pi}{\pi} \Rightarrow D = \frac{5 \times 180^\circ}{4} \Rightarrow D = 225^\circ$$

تبدیل رادیان به درجه به روش سریع:

برای تبدیل رادیان به درجه ۲ حالت داریم:

حالت اول: زاویه داده شده بر حسب π داده شده باشد که در این صورت کافیت به جای π رادیان مقدار 180° را قرار دهیم تا به درجه تبدیل شود.

مثال: زاویه D بر حسب درجه برابر $\frac{\pi}{20}$ رادیان است. اندازه این زاویه چند درجه است؟

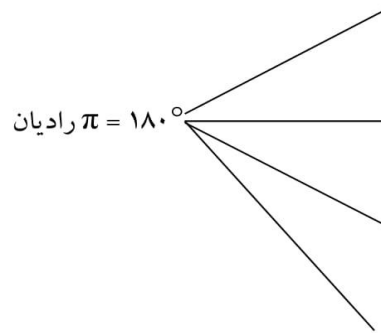
$$\frac{\pi}{20} = \frac{n}{N} \cdot \frac{l}{l} \cdot \frac{\pi}{\pi} \Rightarrow \frac{180^\circ}{20} = 9 \text{ رادیان}$$

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی



$$\xrightarrow{+2} \text{رادیان } \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$$\xrightarrow{+3} \text{رادیان } \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$\xrightarrow{+4} \text{رادیان } \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\xrightarrow{+6} \text{رادیان } \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

مثال: هر یک از زاویه های $\frac{4\pi}{5}, \frac{5\pi}{9}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{7\pi}{12}$ را به درجه تبدیل کنید و روی دایره مثلثاتی نشان

دهید.

حل) کافست به جای π رادیان مقدار 180° را قرار دهیم

$$\text{رادیان } \frac{4\pi}{5} = \frac{4 \times 180^\circ}{5} = 144^\circ$$

$$\text{رادیان } \frac{5\pi}{9} = \frac{5 \times 180^\circ}{9} = 100^\circ$$

$$\text{رادیان } -\frac{3\pi}{8} \rightarrow D = -\frac{3 \times 180^\circ}{8} = -67.5^\circ$$

$$\text{رادیان } -\frac{7\pi}{12} \rightarrow D = -\frac{7 \times 180^\circ}{12} = -105^\circ$$

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

تمرین: هر یک از زاویه های $\frac{-\pi}{18}$ رادیان ، $\frac{-2\pi}{5}$ رادیان، $\frac{2\pi}{5}$ رادیان، $\frac{7\pi}{4}$ رادیان، $\frac{6\pi}{5}$ رادیان را به

درجه تبدیل کنید و به طور تقریبی روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

مثال: تفاضل دو زاویه بر حسب رادیان برابر $\frac{2\pi}{9}$ است. اگر اندازه یکی از زوایا سه برابر اندازه زاویه

دیگری باشد اندازه دو زاویه را بر حسب درجه به دست آورید.

$$\frac{2\pi}{9} \text{ رادیان بر حسب درجه برابر است با :}$$

$$D = \frac{2\pi}{9} = \frac{2 \times 180^\circ}{9} = 40^\circ$$

اگر اندازه دو زاویه α و β باشد آنگاه طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 40^\circ \\ \alpha = 3\beta \end{cases} \Rightarrow 3\beta - \beta = 40^\circ \Rightarrow 2\beta = 40^\circ \Rightarrow \beta = 20^\circ$$

$$\alpha = 3\beta = 60^\circ$$

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

علامت نسبت های مثلثاتی



هستک



مثال: علامت هر یک از نسبت های مثلثاتی زیر را مشخص کنید.

پ) $\cos\left(\frac{11\pi}{9}\right)$

ب) $\sin\left(-\frac{7\pi}{5}\right)$

الف) $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$

ج) $\cot\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

ث) $\tan\left(-\frac{11\pi}{7}\right)$

ت) $\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)$

ح) $\cot\left(\frac{12\pi}{11}\right)$

چ) $\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

حل) باید ناحیه ای را که انتهای زاویه در آن قرار می گیرد مشخص کنیم و سپس علامت نسبت مثلثاتی را مشخص کنیم ، ابتدا زاویه های داده شده را بر حسب درجه به دست می آوریم و سپس ناحیه مورد نظر را مشخص می کنیم.

$$\text{ناحیه دوم } ۱۱۲/۵ = \frac{۵ \times ۱۸۰}{۸} = \text{اندازه } \frac{۵\pi}{۸} \text{ بر حسب درجه}$$

$$۹۰^\circ < ۱۱۲/۵^\circ < ۱۸۰^\circ \Rightarrow \sin ۱۱۲/۵^\circ > ۰$$

$$\text{رادیان } -\frac{۷\pi}{۵} = \frac{-۷ \times ۱۸۰^\circ}{۵} = -۲۵۲^\circ \quad \text{ناحیه دوم} \quad (\text{ب})$$

$$\sin\left(\frac{-۷\pi}{۵}\right) > ۰$$

(پ)

$$\text{رادیان } \frac{۱۱\pi}{۹} \rightarrow D = \frac{۱۱ \times ۱۸۰}{۹} = ۲۲۰^\circ \text{ ناحیه سوم}$$

در ناحیه سوم سینوس منفی است

(ت)

$$\text{رادیان } \frac{۱۹\pi}{۱۲} = \frac{۱۹ \times ۱۸۰^\circ}{۱۲} = ۲۸۵^\circ = ۲۷۰^\circ + ۱۵^\circ$$

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$\text{ربع چهارم} \rightarrow \cos \frac{19\pi}{12} > 0$$

(ث)

$$\text{رادیان} \quad \frac{-11\pi}{7} = \frac{-11 \times 180^\circ}{7} \approx -283^\circ = -270^\circ - 13^\circ$$

انتهای زاویه در ناحیه اول قرار می گیرد و در نتیجه :

$$\tan\left(-\frac{11\pi}{7}\right) > 0$$

(ج)

$$\text{رادیان} \quad \frac{5\pi}{4} \rightarrow D = \frac{5 \times 180^\circ}{4} = 225^\circ \quad \text{ربع سوم}$$

در ناحیه سوم کتانژانت مثبت است

(چ)

$$\text{رادیان} \quad -\frac{\pi}{3} = -60^\circ \longrightarrow \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) < 0$$

در ناحیه چهارم کتانژانت منفی است

(ح)

$$\frac{13\pi}{11} \rightarrow D = \frac{13 \times 180^\circ}{11} = 212 / 7^\circ$$

ربع سوم

در ناحیه سوم کتانژانت مثبت است

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

مثال:

علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان رو به روی α	زاویه α
$\tan \alpha < 0$	ربع اول	$\frac{3\pi}{4}$ رادیان
$\sin \alpha > 0$	ربع دوم	$\frac{4\pi}{5}$ رادیان
$\cos \alpha < 0$	ربع چهارم	$\frac{5\pi}{3}$ رادیان
$\cot \alpha > 0$	ربع اول	$\frac{5\pi}{12}$ رادیان
$\tan \alpha < 0$	ربع سوم	$\frac{5\pi}{4}$ رادیان

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi + \pi - \pi}{4} = \frac{(3\pi + \pi) - \pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$$

پس در ربع دوم قرار دارد. (می توان ابتدا به درجه تبدیل کرد سپس علامت را مشخص کرد)

$$\frac{4\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5} \quad \text{بنابراین} \quad \frac{4\pi}{5} \text{ رادیان به اندازه } \frac{\pi}{5} \text{ رادیان از } \pi \text{ رادیان کم تر است پس در ربع دوم قرار}$$

دارد.

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$\frac{5\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{بنابراین} \quad \frac{5\pi}{3} \text{ رادیان به اندازه } \frac{\pi}{3} \text{ رادیان از } 2\pi \text{ رادیان کم تر است پس در ربع چهارم}$$

قرار دارد.

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \quad \text{بنابراین} \quad \frac{5\pi}{12} \text{ رادیان به اندازه } \frac{\pi}{12} \text{ رادیان از } \frac{\pi}{2} \text{ رادیان کم تر است پس در ربع اول قرار}$$

دارد.

$$\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{بنابراین} \quad \frac{5\pi}{4} \text{ رادیان به اندازه } \frac{\pi}{4} \text{ رادیان از } \pi \text{ رادیان بیش تر است پس در ربع سوم قرار}$$

دارد.

زاویه α نسبت	0° رادیان = 0	30° رادیان = $\frac{\pi}{6}$	45° رادیان = $\frac{\pi}{4}$	60° رادیان = $\frac{\pi}{3}$	90° رادیان = $\frac{\pi}{2}$	180° رادیان = π	270° رادیان = $\frac{3\pi}{2}$	360° رادیان = 2π
$\sin \alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos \alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan \alpha$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot \alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } \cot \frac{\pi}{6} - \tan \alpha \frac{\pi}{3} \times \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cot^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} + \cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} + 1 = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} + 1 = \frac{10}{9} + 1 = \frac{19}{9} \quad \text{ب)}$$

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

مثال: مقدار عددی هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} - \cot \frac{\pi}{4} \quad \text{ب) } \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{3} + 3 \sin \frac{2\pi}{3} - \tan \pi$$

$$\text{پ) } \cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 2\pi \quad \text{ت) } \frac{\tan^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{6}}{\tan^2 \frac{\pi}{4} - \cot^2 \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{ث) } \frac{\tan \frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{6} - \tan^2 \frac{\pi}{3}}{3 \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} \cot \frac{\pi}{6}} \quad \text{ج) } \sin^2 \frac{\pi}{6} - \cot^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{6}$$

$$\text{حل (آ)} \quad \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} - \cot \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

ب)

$$\sqrt{3} \tan \frac{\pi}{3} + 3 \sin \frac{2\pi}{3} - \tan \pi = \sqrt{3} \times \sqrt{3} + 3(-1) - 0$$

$$= 3 - 3 - 0 = 0$$

پ)

$$\cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 2\pi = \left(\cos \frac{\pi}{3} \right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{4} \right)^2 - (\cos 2\pi)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - (1)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

(ت)

$$\frac{\tan^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{6}}{\tan^2 \frac{\pi}{4} - \cot^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{(\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{(1)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{3 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{8}{9}} = \frac{9 \times 15}{4 \times 8} = \frac{135}{32}$$

(ث) به ازای هر مقدار $x \neq \frac{k\pi}{2}$ حاصل $\tan x \cdot \cot x$ برابر یک است، بنابراین:

$$\tan \frac{\pi}{8} \cot \frac{\pi}{8} = 1, \quad \tan^2 \frac{\pi}{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت} = \frac{1-3}{2 \times \frac{1}{2} + \sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{-2}{1+3} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

(ج) به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ مقدار $\sin^2 x + \cos^2 x$ برابر یک است بنابراین

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} = 1$$

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت} = \left(\sin \frac{\pi}{6} \right)^2 - \left(\cot \frac{\pi}{3} \right)^2 + 1$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{3-1+4}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

حالت دوم: زاویه داده شده به صورت عدد باشد کافیت عدد داده شده را در ۵۷ ضرب کنیم تا به درجه تبدیل شود.

مثال: ۵ رادیان معادل چند درجه است؟

$$5 \times 57 = 285$$

مثال: ۰/۵ رادیان معادل چند درجه است؟

$$0.5 \times 57 = 28.5$$

مثال:

زاویه بر حسب رادیان	۰/۵ رادیان	۱ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان	۳/۱۴ رادیان	π رادیان
زاویه بر حسب درجه	تقریباً 28.5°	تقریباً 57°	تقریباً 114°	تقریباً 171°	تقریباً 179°	دقیقاً 180°
	$57^\circ \times 0.5 = 28.5^\circ$	$57^\circ \times 1 = 57^\circ$	$57^\circ \times 2 = 114^\circ$	$57^\circ \times 3 = 171^\circ$	$57^\circ \times 3.14 = 179^\circ$	

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

تبدیل درجه به رادیان به روش سریع :

کافیست عدد داده شده را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب کنیم**مثال:** هر یک از زاویه های 120° ، -20° ، 225° و -330° را به رادیان تبدیل کنید.

$$D = 120^\circ \rightarrow R = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

$$D = -20^\circ \rightarrow R = -20 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{9}$$

$$D = 225^\circ \rightarrow R = 225 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$$

$$D = -330^\circ \rightarrow R = -330 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{11\pi}{6}$$

مثال: هر یک از زاویه ها را از درجه به رادیان تبدیل کنید.

$$30^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \text{رادیان } \frac{\pi}{6}$$

$$36^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \text{رادیان } \frac{\pi}{5}$$

$$45^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \text{رادیان } \frac{\pi}{4}$$

$$60^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \text{رادیان } \frac{\pi}{3}$$

$$90^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \text{رادیان } \frac{\pi}{2}$$

$$180^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \text{رادیان } \pi$$

تمرین: هر یک از زاویه های -12° ، 36° ، 72° ، 105° ، 315° را به رادیان تبدیل کنید و روی دایره

مثلاثی نشان دهید.

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

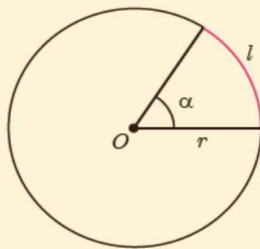
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

نکته : در حالت کلی با تقسیم طول کمان به شعاع دایره (r)، اندازه زاویه مرکزی مربوط به آن بر حسب رادیان به دست می آید به عبارت دیگر:

$$\text{طول کمان روبه روی زاویه} = \frac{\text{اندازه زاویه بر حسب رادیان}}{\text{شعاع دایره}}$$



اگر l طول کمان روبه روی زاویه، r شعاع دایره و α اندازه زاویه بر حسب رادیان باشد، آنگاه رابطه بالا را به صورت زیر می توان نوشت :

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

در رابطه بالا l و r هم واحدند.

مثال: با استفاده از رابطه بالا جدول زیر را کامل کنید.

l		۵۰۰ سانتی متر		۲۰۰ سانتی متر	۹۰ سانتی متر	۵۰ متر	۱۰ متر	
r	۵ سانتی متر	۵ متر	۰/۵ متر	۱ متر		۱۰ متر		۲۰ سانتی متر
α	۱ رادیان		۱/۵ رادیان		۳ رادیان		۱۰ رادیان	۲۰ رادیان

$$r = 5 \text{ cm}, \alpha = 1 \text{ رادیان}, l = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 1 = \frac{l}{5} \Rightarrow l = 5 \text{ cm}$$

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$r = 5 \text{ m}, l = 500 \text{ cm} \Rightarrow l = 5 \text{ m}, \alpha = ?, \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{5} \Rightarrow \alpha = 1 \text{ رادیان}$$

$$r = 0.5 \text{ m}, \alpha = 1/5 \text{ رادیان}, l = ?, \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 1 = \frac{l}{0.5} \Rightarrow l = 0.5 \text{ m}$$

$$r = 1 \text{ m}, l = 200 \text{ cm} \Rightarrow l = 2 \text{ m}, \alpha = ?, \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{1} \Rightarrow \alpha = 2 \text{ رادیان}$$

$$l = 90 \text{ cm}, \alpha = 3 \text{ رادیان}, r = ?, \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 3 = \frac{90}{r} \Rightarrow r = 30 \text{ cm}$$

$$r = 10 \text{ m}, l = 50 \text{ m}, \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{50}{10} \Rightarrow \alpha = 5 \text{ رادیان}$$

$$l = 10 \text{ m}, \alpha = 10 \text{ رادیان}, r = ?, \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 10 = \frac{10}{r} \Rightarrow r = 1 \text{ m}$$

$$r = 20 \text{ cm}, \alpha = 20 \text{ رادیان}, l = ?, \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 20 = \frac{l}{20} \Rightarrow l = 400 \text{ cm}$$

مثال: در هر قسمت، r شعاع دایره، α اندازه زاویه مرکزی و l طول کمان رو به روی زاویه مرکزی α می

باشد. مقدار مجهول را به دست آورید.

الف) $\alpha = ?, r = 50 \text{ cm}, l = 2 \text{ m}$ ب) $r = ?, l = 20 \text{ cm}, \alpha = 4$

پ) $l = ?, r = 4 \text{ m}, \alpha = 60^\circ$

حل) از تساوی $\alpha = \frac{l}{r}$ مقدار هر یک از مجهولات را به دست می آوریم:

الف) l بر حسب متر و r بر حسب سانتی متر است برای هم واحد کردن کافی است l را بر حسب سانتی متر

بنویسیم:

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$l = 2m = 2 \times 100 = 200 \text{ cm} \Rightarrow \alpha = \frac{l}{r} = \frac{200}{50} = 4$$

$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow r = \frac{l}{\alpha} = \frac{20}{4} = 5 \text{ cm} \quad (\text{ب})$$

پ) ابتدا α را بر حسب رادیان به دست می آوریم:

$$R = \frac{\pi D}{180} = \frac{\pi \times \cancel{180}}{\cancel{180}} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha \frac{\pi}{3} = \frac{l}{r}$$

$$\Rightarrow l - r\alpha = 4 \times \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} m$$

مثال: نقطه دلخواه A روی دایره به مرکز O و شعاع ۳ متر قرار دارد. نقطه A را به اندازه 80° در خلاف

جهت حرکت عقربه های ساعت به مرکز O دوران می دهیم تا به نقطه B برسیم و سپس نقطه B را به اندازه

 50° در جهت حرکت عقربه های ساعت و به مرکز O دوران می دهیم تا به نقطه C برسیم. طول کمان

AC را به دست آورید.

(حل) در شکل زیر و با توجه به فرض، نقاط B و C مشخص شده است؛ با توجه به شکل داریم:

$$\angle AOC = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ \xrightarrow[\text{رادیان}]{\text{ن}} \frac{\pi}{6}$$

$$r = 3, AC = l, \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow l = r\alpha = 3 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

مثال: دایره ای به شعاع ۱۰ سانتی متر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمان به طول ۸ سانتیمتر

از این دایره چند رادیان است؟

$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{8}{10} \Rightarrow \alpha = 0.8 \text{ رادیان}$$

نکته: l و r هم واحد هستند و α بر حسب رادیان به دست می آید.

مثال: درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی الساقین ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعده این مثلث کوچک تر

از اندازه هر یک از ساق های آن است.

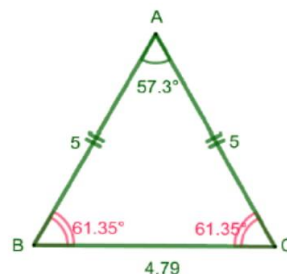
همانطور که قبلا دیده ایم ۱ رادیان تقریبا برابر $57/3^\circ$ درجه است. بنابر این باتوجه به اینکه مثلث متساوی

الساقین است؛ بنا براین اندازه هر یک از دو زاویه مجاور به ساق را می توان به دست آورد:

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 57/3^\circ}{2} = 61/35^\circ$$

بزرگ تر از ضلع رو به رو زاویه کوچک تر است پس طول قاعده کوچک تر از طول ساق ها خواهد بود

پس عبارت فوق درست است.



مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

ب) در دایره ای به شعاع ۱ سانتی متر طول کمان رو به روی زاویه π رادیان تقریباً برابر با $\frac{3}{14}$ سانتی متر است.

$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow l = r\alpha \Rightarrow l = 1 \times \pi = \pi = 3.14 \text{ cm}$$

این عبارت درست است زیرا

پ) انتهای کمان زاویه $\frac{6\pi}{5}$ رادیان در ربع دوم دایره مثلثاتی قرار دارد

این عبارت نادرست است زیرا:

راه اول: $\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$ بنابراین انتهای کمان این زاویه در ربع سوم قرار دارد؛ زیرا بیش تر از π رادیان است.

راه دوم: انتهای کمان زاویه 216° در ربع سوم است.

$$\frac{6\pi}{5} \xrightarrow[\text{رادیان}]{\text{ن}} \xrightarrow[\pi = 180^\circ]{\text{ل}} \frac{1080^\circ}{5} = 216^\circ$$

ت) زاویه های $\frac{2\pi}{3}$ رادیان، $\frac{\pi}{9}$ رادیان، $\frac{7\pi}{36}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می دهند.

این عبارت نادرست است زیرا:

راه اول: می دانیم که مجموعه زاویه های داخلی یک مثلث 180° است پس

$$\frac{2\pi}{3} \xrightarrow[\text{رادیان}]{\text{ن}} \xrightarrow[\pi = 180^\circ]{\text{ل}} \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

$$\frac{7\pi}{36} \xrightarrow[\text{رادیان}]{\text{ن}} \xrightarrow[\pi = 180^\circ]{\text{ل}} \frac{1260^\circ}{36} = 35^\circ$$

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$\text{رادیان } \frac{\pi}{9} \xrightarrow{\text{ن}} \xrightarrow{\text{ل}} \xrightarrow{\pi = 180^\circ \text{ رادیان}} \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$$

$$120^\circ + 20^\circ + 35^\circ = 175^\circ < 180^\circ$$

راه دوم : می دانیم مجموع زاویه های داخلی یک مثلث 180° یا همان π رادیان است پس:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi + 4\pi + 7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} \Rightarrow \text{ن} \quad \text{ل} \quad \xrightarrow{\pi = 180^\circ \text{ رادیان}} \frac{35\pi}{36} \xrightarrow{\text{ن}} \xrightarrow{\text{ل}} \text{رادیان}$$

$$\frac{350^\circ}{36} = 175^\circ < 180^\circ$$

راه سوم: می دانیم مجموع زاویه های داخلی یک مثلث 180° یا همان π رادیان است پس:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi + 4\pi + 7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} < \pi$$

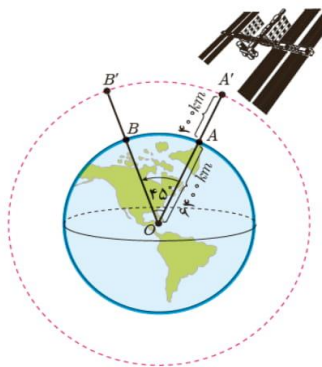
مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

مثال: ایستگاه فضایی بین المللی را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید که در فاصله تقریبی ۴۰۰ کیلومتر بالای کره زمین B تا نقطه A سطح کره زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطه پوشش می دهد؟ B و A زاویه 45° می سازند، رصد شود، این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از شعاع تقریبی کره زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.



الف) ابتدا زاویه مرکزی 45° را به رادیان تبدیل کنید.

$$\text{رادیان } \alpha = 45^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4} \quad \text{اندازه زاویه مرکزی } \angle AOB \text{ بر حسب رادیان}$$

ب) شعاع مدار دایره ای شکل که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد، برابر است با $r = 6800 \text{ km}$

$$r = 6400 + 400 = 6800 \text{ km}$$

پ) طول کمان روبه روی $A'OB'$ با فرض $\pi = 3/14$ و با استفاده از رابطه $\alpha = \frac{l}{r}$ به طور تقریبی

برابر است با:

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

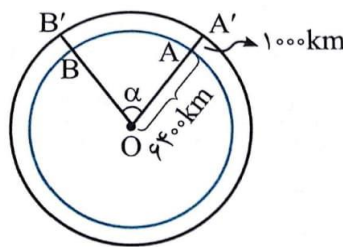
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$= l = \frac{\pi}{4} \times 6800 \Rightarrow l = \frac{3/14}{4} \times 6800 = 5338 \text{ km} \quad \text{طول کمان } A'B'$$

مثال: یک ماهواره مخابراتی را در نظر بگیرید که در فاصله ۱۰۰۰ کیلومتری سطح کره زمین به دور آن در حال حرکت است. اگر این ماهواره در دو نقطه A و B روی سطح زمین که با مرکز زمین زاویه α می سازد رصد شود، مسافتی را در مدار خود از A' به B' به طول ۸۰۰۰ کیلومتر طی می کند. اگر شعاع کره زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد، مقدار تقریبی α را بر حسب درجه به دست آورید.



حل) با توجه به شکل و رابطه $\alpha = \frac{l}{r}$ داریم:

$$\begin{cases} l = A'B' = 8000 \\ r = AA' + OA = 1000 + 6400 = 7400 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{8000}{7400} = 1.081 \text{ (ن رادیان)}$$

$$D = 1.081 \times 57 \approx 61.6 \text{ درجه} \rightarrow \alpha \approx 61.6 \text{ درجه}$$

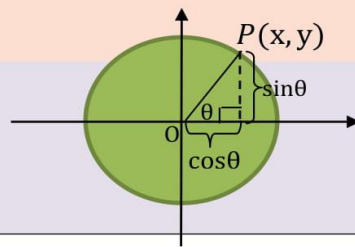
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

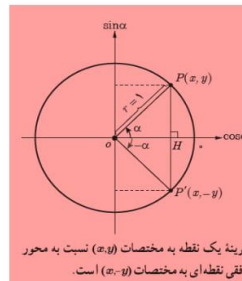
درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

یادآوری: با توجه به اینکه محور x ها را محور کسینوس ها و محور y ها را محور سینوس ها می نامیم اگر P نقطه دلخواهی روی دایره مثلثاتی باشد که نیم خط OP با قسمت مثبت محور x زاویه θ می سازد، آنگاه p نقطه ای با مختصات (x, y) است که در آن $x = \cos\theta$ و $y = \sin\theta$.



نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه

دو زاویه α و $-\alpha$ در شکل زیر را قرینه یکدیگر می گویند.



مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

اگر در شکل مقابل، $\alpha = 30^\circ$ ، نسبت های مثلثاتی زاویه -30° در $\triangle OPH$ عبارت اند از:

$$\sin(-30^\circ) = -y = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(-30^\circ) = x = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-30^\circ) = \frac{-y}{x} = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot(-30^\circ) = \frac{x}{-y} = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

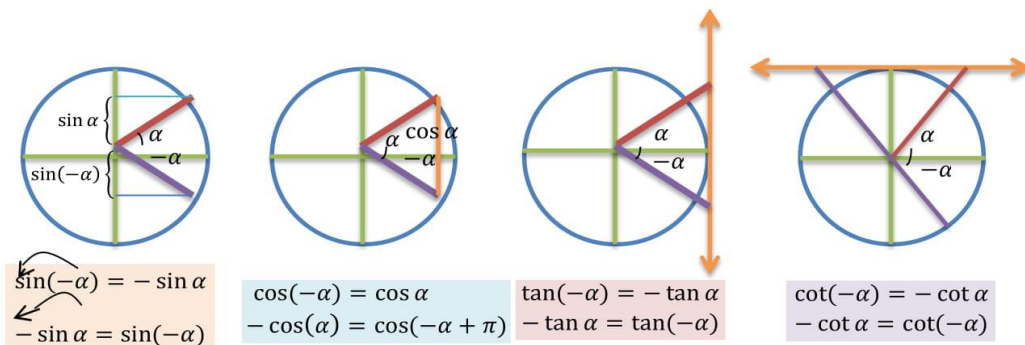
در حالت کلی:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$



مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

COS منفی خور است یعنی اگر منفی جلویش باشد آن را می خورد

$$\begin{matrix} \sin \\ \tan \\ \cot \end{matrix} (-\theta) = - \begin{matrix} \sin \\ \tan \\ \cot \end{matrix} (\theta)$$

sin , tan , cot منفی اندازند یعنی اگر منفی جلوی آن ها باشد منفی را برمی دارد و پشت خود می اندازند.

مثال: نسبت های مثلثاتی زاویه $-\frac{\pi}{4}$ رادیان را

جهت تهیه جزوه کامل فصل چهارم ریاضی پایه یازدهم با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا به آیدی

تلگرام @habib_hashemi پیام دهید.

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تألیف حبیب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس
دربزرگاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش و پرورش منطقه ۴ تهران و مدرس دانشگاه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و

یا به آیدی تلگرام @habib_hashemi پیام دهید.

اینستاگرام: academy.riazi

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تألیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

موفق بودن در ریاضی ادرصد استعداد و ۹۹ درصد پشتکار

تدریس خصوصی ریاضیات

متوسطه اول و متوسطه دوم

کنکور - تقویتی

گروهی / انفرادی

به صورت تخصصی و کاملاً مفهومی با جزوه اختصاصی

مشاهده جزوات در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

دبیر رسمی آموزش و پرورش با ۱۸ سال سابقه تدریس

کارشناس ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

مؤلف شش کتاب در زمینه کنکور

نویسنده برتر استان

معلم نمونه شهرستان و استان

نفر اول استان در جشنواره الگوهای برتر تدریس

نفر اول کشور در جشنواره الگوهای برتر تدریس

شماره تماس: ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

مبحث : درسنامه فصل چهارم ریاضی یازدهم تجربی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی